

Vorlesung: Lineare Modelle

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

SoSe 2014

- 5 Metrische Einflußgrößen: Polynomiale Regression, Trigonometrische Polynome, Regressionssplines, Transformationen.
- 6 Modelldiagnose
- 7 Variablenselektion
- 0 Das allgemeine lineare Modell: Gewichtete KQ-Methode, Autokorrelierte und heteroskedastische Störterme**
- 0 Das logistische Regressionsmodell
- 10 Das gemischte lineare Regressionsmodell („Linear mixed Model“)

040

040

Das allgemeine lineare Modell

Das lineare Modell mit heteroskedastischen Störgrößen ist gegeben durch:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (8.1)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 V) \quad (8.2)$$

$$V = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (8.3)$$

V bekannte Matrix zur Beschreibung der Varianzstruktur

Gewichtsmatrix: $W = V^{-1/2} = \text{diag}(v_1^{-1/2}, v_2^{-1/2}, \dots, v_n^{-1/2})$

Der gewichtete KQ-Schätzer

$$\hat{\beta}_W := (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y \quad (8.4)$$

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\varepsilon}'V^{-1}\hat{\varepsilon})/(n - p') \quad (8.5)$$

$\hat{\beta}_W$ ist ML-Schätzer und minimiert die **gewichtete Residuenquadratsumme**

$$(Y - X\beta)'V^{-1}(Y - X\beta). \quad (8.6)$$

040

040

Herleitung durch Transformation

Das Modell (8.1)-(8.3) lässt sich in ein gewöhnliches lineares Modell transformieren:

$$Y^* := WY \tag{8.7}$$

$$X^* := WX \tag{8.8}$$

$$\varepsilon^* := W\varepsilon \tag{8.9}$$

Dann gilt:

$$Y^* = X^*\beta + \varepsilon^* \tag{8.10}$$

$$\varepsilon^* \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{8.11}$$

$\hat{\beta}_W$ ist KQ-Schätzer im transformierten Modell

Verallgemeinerte KQ-Methode

Das lineare Modell mit allgemeiner Varianzstruktur ist gegeben durch:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{8.12}$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 V) \tag{8.13}$$

$V \in R^{n \times n}$: beliebige bekannte Kovarianzmatrix mit vollem Rang

Dann gibt es eine invertierbare Matrix T mit

$$TT' = V, \quad W = T^{-1} \text{ Gewichtsmatrix.}$$

Der **verallgemeinerte KQ-Schätzer** ist gegeben durch:

$$\hat{\beta}_W := (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y \tag{8.14}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\varepsilon}'V^{-1}\hat{\varepsilon})/(n - p') \tag{8.15}$$

Das Modell (8.12)-(8.13) lässt sich wie oben in ein gewöhnliches lineares Modell transformieren:

$$Y^* := WY \tag{8.16}$$

$$X^* := WX \tag{8.17}$$

$$\varepsilon^* := W\varepsilon \tag{8.18}$$

Dann gilt:

$$Y^* = X^*\beta + \varepsilon^* \tag{8.19}$$

$$\varepsilon^* \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{8.20}$$

Eigenschaften des verallgemeinerten KQ-Schätzers

Gegeben sei das Modell (8.12) bis (8.13).

Dann gilt:

$$E(\hat{\beta}_W) = \beta \tag{8.21}$$

$$V(\hat{\beta}_W) = \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} \tag{8.22}$$

Alle Testverfahren und Quadratsummenzerlegungen lassen sich im Modell $Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$ betrachten und damit auf den Fall homogener Varianzen zurückführen.

Sei das Modell

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon, & \text{rg } X &= p' \\ E(\varepsilon) &= 0 \\ V(\varepsilon) &= \sigma^2 V \end{aligned}$$

gegeben.

Dann ist $\hat{\beta}_W$ unter den erwartungstreuen linearen Schätzern derjenige mit der kleinsten Varianz:

$\hat{\beta}_W$ ist BLUE-Schätzer (**b**est **l**inear **u**nbiased **e**stimator).

- AR(1) (allgemeine Zeitreihenstruktur)
- Longitudinale Daten (Mehrdimensionale Zeitreihen) Blockdiagonale Struktur
- Symmetrische Struktur (gemischte Modelle)

Im Allgemeinen müssen die Parameter der Varianzstruktur geschätzt werden.

Dazu gibt es verschiedene Verfahren:

- ML
- REML (Restricted Maximum Likelihood)
- Robuste Varianzschätzung mit „Working correlation“

Sei das Modell

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon, & \text{rg } X &= p' \\ E(\varepsilon) &= 0 \\ V(\varepsilon) &= \sigma^2 V(\vartheta) \end{aligned}$$

gegeben. Der Parameter(vektor) ϑ ist zu schätzen.

Als Log-Likelihood ergibt sich (von additiven Konstanten abgesehen):

$$l(\beta, \vartheta) = -\frac{1}{2} (\ln |V(\vartheta)| + (\mathbf{Y} - X\beta)' V^{-1}(\vartheta) (\mathbf{Y} - X\beta)) \quad (8.23)$$

Ist ϑ bekannt, so ist der MLE von β bedingt auf ϑ (gewichteter KQ-Schätzer):

$$\hat{\beta}(\vartheta) = (X'V(\vartheta)^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}(\vartheta)Y. \tag{8.24}$$

Einsetzen liefert die Profil-Log-Likelihood:

$$l(\vartheta) = -\frac{1}{2} (\ln |V(\vartheta)| + (Y - X\beta(\vartheta))'V^{-1}(\vartheta)(Y - X\beta(\vartheta))) \tag{8.25}$$

Inferenz bezüglich von β

Es gilt: $\hat{\beta}(\vartheta)$ einer multivariaten Normalverteilung mit Erwartungswert β und Kovarianzmatrix

$$\text{var}(\hat{\beta}) = (X'V^{-1}X)^{-1} \tag{8.27}$$

Da V unbekannt ist, wird es durch den (RE)ML-Schätzer $V(\hat{\vartheta})$ ersetzt.

Zur Konstruktion von Konfidenzintervallen und entsprechenden Tests nimmt man an, dass β asymptotisch normalverteilt ist. Für spezielle Modelle ist dies bewiesen, aber eine allgemeingültige asymptotische Normalverteilungsaussage ist nicht nachgewiesen.

Da die Varianzmatrix V nur geschätzt wird, werden in der Praxis deshalb häufig approximative t-Tests und entsprechende Konfidenzintervalle benutzt, die die Verteilung von $(\hat{\beta}_j - \beta_j)/s.e.(\hat{\beta}_j)$ durch eine t-Verteilung approximieren und die zugehörigen Freiheitsgrade geeignet schätzen.

Maximieren von (10.22) bezüglich ϑ liefert ML-Schätzer. Da dieser nicht erwartungstreu ist, verwendet man häufig den sogenannten restringierten ML-Schätzer:

Dieser maximiert

$$L_R(\vartheta) = l(\vartheta) - \frac{1}{2} \ln |X'V(\vartheta)^{-1}X| \tag{8.26}$$

Im einfachen linearen Modell entspricht der REML-Schätzer dem erwartungstreuen Schätzer von σ^2 .

Beispiele

- Wildzeitreihen: Varianzstruktur: Unabhängigkeit der Einzelzeitreihen, aber AR(1)-Struktur für jede einzelne Zeitreihe
- Schuldaten mit Korrelation innerhalb einer Klasse

Korrelationsmatrix Wilddaten

$$\begin{pmatrix}
 \boxed{\begin{matrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^k \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix}} & & 0 & & 0 \\
 & \boxed{\begin{matrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \dots & \rho^k \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{k-1} \\ \rho^2 & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \rho^k & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{matrix}} & & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & & & \boxed{}
 \end{pmatrix}$$

